Estimation of a nonnegative-valued normal mean from the Bayesian viewpoint (Statistical Experiment and Its Related Topics)

赤平, 昌文; 竹内, 啓

数理解析研究所講究録
第 1703 巻 2010 年 215-223

Estimation of a nonnegative-valued normal mean from the Bayesian viewpoint

筑波大学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira, University of Tsukuba)
東京大学 竹内 啓 (Kei Takeuchi, Professor Emeritus, University of Tokyo)

1 はじめに

統計的推定において, 母集団から抽出された標本に基づいて母集団分布の母数を推定する際に, 通常は母数の取り得る値を制約しないが, 実験物理等の分野では, 母数が本来, 非負値 (あるいは正値) であることが理論的に仮定されている場合が少なくない ([MS00], [RW01]). このような場合には, 数理統計学的には Bayesian の観点から母数の存在範囲に事前分布を定めれば良いが, 事前分布の選択問題という難しさはある. 一方, Non-Bayesian, すなわち頻度主義の観点からは区間推定は一群の仮説検定問題を考えて, 与えられた標本値に対し, その点が受容域に含まれるような仮説に対応する母数の集合を取れば良い. また, このように制約のある母数の信頼区間の構成を Bayes 法と頻度主義的方法を組み合わせた方法によって行うことは有用であることも示されている ([AST05], [SA04]). 本論では, Bayes 的観点から正規分布の場合に非負値平均の点推定, 区間推定について考察する.

2 点推定

まず, $X_1, \cdots, X_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とする. ただし, $\mu \in [0, \infty)$ とする.

(i) σ^2 が既知の場合. いま, $\sigma^2 = 1$ とすると, μ の最尤推定量 (MLE) は

$$\hat{\mu}_{ML} := \max\{\bar{X}, 0\}$$

になる. ただし, $\bar{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする. ここで, $\hat{\mu}_{ML}$ は許容的でない. 何故なら, いま, $\hat{\mu}_{ML}$ を許容的であるとすれば, $\hat{\mu}_{ML}$ は, 2 乗損失と, ある広義の事前密度 π すなわち

$$\pi(\mu) \geq 0 \quad (\mu \in [0, \infty)), \qquad \int_0^{\infty} \pi(\mu) d\mu \leq \infty$$

となる π に関して一般 Bayes 推定量になる. よって

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^*(\bar{X}) &= \int_0^{\infty} \mu \prod_{i=1}^{n} \phi(X_i - \mu)\pi(\mu) d\mu \Big/ \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \phi(X_i - \mu)\pi(\mu) d\mu \\ &= \int_0^{\infty} \mu e^{-n(\mu - \bar{X})^2/2} \pi(\mu) d\mu \Big/ \int_0^{\infty} e^{-n(\mu - \bar{X})^2/2} \pi(\mu) d\mu\end{aligned}$$

になる. ただし, ϕ は $N(0, 1)$ の確率密度関数 (p.d.f.) とする. ここで, $\hat{\mu}^*(\cdot)$ は微分可能であるから $\hat{\mu}_{ML}$ の微分不可能性に反する. よって, $\hat{\mu}_{ML}$ は許容的になる.

次に, 任意の $K > 0$ について

$$\pi_K(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{K}e^{-\mu/K} & (\mu \geq 0) \\ 0 & (\mu < 0) \end{cases} \tag{2.1}$$

となる事前密度 π_K をとる. このとき, 事後密度は, $\mu \geq 0$ について

$$\begin{aligned} \pi_K(\mu|\bar{X}) &= \prod_{i=1}^{n}\phi(X_i-\mu)\pi_K(\mu) \Big/ \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n}\phi(X_i-\mu)\pi_K(\mu)d\mu \\ &= \exp\{-\frac{n}{2}(\mu-\bar{X})^2-\frac{\mu}{K}\} \Big/ \int_0^\infty \exp\{-\frac{n}{2}(\mu-\bar{X})^2-\frac{\mu}{K}\}d\mu \\ &= \phi(\sqrt{n}(\mu-\bar{X}+\frac{1}{nK})) \Big/ \int_0^\infty \phi(\sqrt{n}(\mu-\bar{X}+\frac{1}{nK}))d\mu \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる. よって, 2 乗損失と事前密度 π_K に関する Bayes 推定量は, 事後平均

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_K(\bar{X}) := E(\mu|\bar{X}) &= \int_0^\infty \mu\pi_K(\mu|\bar{X})d\mu \\ &= \int_0^\infty \mu\phi\left(\sqrt{n}\left(\mu-\bar{X}+\frac{1}{nK}\right)\right)d\mu \Big/ \int_0^\infty \phi\left(\sqrt{n}\left(\mu-\bar{X}+\frac{1}{nK}\right)\right)d\mu \\ &= \bar{X}-\frac{1}{nK}+\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\sqrt{n}(\bar{X}-\frac{1}{nK})}^\infty t\phi(t)dt\right\} \Big/ \int_{-\sqrt{n}(\bar{X}-\frac{1}{nK})}^\infty \phi(t)dt \\ &= \bar{X}-\frac{1}{nK}+\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\phi(\sqrt{n}(\bar{X}-\frac{1}{nK}))\right\} \Big/ \Phi(\sqrt{n}(\bar{X}-\frac{1}{nK})) \\ &=: \hat{\mu}_0^*(\bar{X}-\frac{1}{nK}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

になる. ただし, Φ は $N(0,1)$ の累積分布関数 (c.d.f.) とする. このとき, (2.3) から

$$\lim_{K\to\infty}\hat{\mu}_K(\bar{X}) = \hat{\mu}_0^*(\bar{X})$$

になり, これは, 2 乗損失と広義の事前密度 $\pi(\mu) \equiv 1$ $(\mu \geq 0)$ に関して一般 Bayes 推定量になる. 次に, $\hat{\mu}_0^*(\bar{X})$ は許容推定量であることを示す. まず, μ の推定量 $\hat{\mu} = \hat{\mu}(\boldsymbol{X})$ の Bayes リスクは

$$R_K(\hat{\mu}) := \int_0^\infty E_\mu[(\hat{\mu}-\mu)^2]e^{-\mu/K}d\mu$$

になるから,

$$\overline{\lim}_{K\to\infty}\{R_K(\hat{\mu}_0^*)-R_K(\hat{\mu}_K)\} = 0 \tag{2.4}$$

ならば, $\hat{\mu}_0^*$ は許容的になる ([LC98]). よって, (2.4) が成り立つことを示せばよい. いま, $n = 1$ として一般性を失わない. このとき, Bayes 推定量は

$$\hat{\mu}_K(X_1) = \frac{\int_0^\infty \mu e^{-\mu/K}\phi(X_1-\mu)d\mu}{\int_0^\infty e^{-\mu/K}\phi(X_1-\mu)d\mu} \tag{2.5}$$

になる. そこで $\hat{\mu}_0^* = \hat{\mu}_0^*(X_1)$ と $\hat{\mu}_K = \hat{\mu}_K(X_1)$ について

$$
\begin{aligned}
&R_K(\hat{\mu}_0^*) - R_K(\hat{\mu}_K) \\
&= \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \{(\hat{\mu}_0^* - \mu)^2 - (\hat{\mu}_K - \mu)^2\} \phi(x-\mu) dx \right] \frac{1}{K} e^{-\mu/K} d\mu \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty (\hat{\mu}_0^* - \hat{\mu}_K)\{\hat{\mu}_0^* - \hat{\mu}_K + 2(\hat{\mu}_K - \mu)\} \phi(x-\mu) \frac{1}{K} e^{-\mu/K} d\mu dx \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

となり, (2.5) から

$$
\int_0^\infty (\hat{\mu}_K - \mu)\phi(x-\mu) e^{-\mu/K} d\mu = 0
$$

となるから, (2.6) より

$$
R_K(\hat{\mu}_0^*) - R_K(\hat{\mu}_K) = \frac{1}{K} \int_{-\infty}^\infty (\hat{\mu}_0^* - \hat{\mu}_K)^2 M_K(x) dx \qquad (2.7)
$$

になる. ただし

$$
M_K(x) := \int_0^\infty e^{-\mu/K} \phi(x-\mu) d\mu = e^{\frac{1}{2K^2} - \frac{x}{K}} \Phi\left(x - \frac{1}{K}\right) \qquad (2.8)
$$

とする. このとき, (2.7), (2.8) より

$$
\int_{-\infty}^\infty (\hat{\mu}_0^*(x) - \hat{\mu}_K(x))^2 M_K(x) dx = O\left(\frac{1}{K}\right)
$$

となり, ここで, $K \to \infty$ とすれば

$$
\int_{-\infty}^\infty (\mu_0^*(x) - \hat{\mu}_K(x))^2 M_K(x) dx \to 0
$$

となる. したがって, (2.7) から

$$
R_K(\mu_0^*) - R_K(\mu_K) \to 0 \quad (K \to \infty)
$$

となり, (2.4) が成り立ち, $\hat{\mu}_0^*$ は許容的になることが示された.

なお, 推定量

$$
\hat{\mu}_0^*(\bar{X}) = \bar{X} + \frac{\phi(\sqrt{n}\bar{X})}{\sqrt{n}\Phi(\sqrt{n}\bar{X})}
$$

の性質として, $\hat{\mu}_0^*(\bar{X}) \geq \bar{X}$ であり,

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mu}_0^*(\bar{x}) - \bar{x} \to 0 \quad (\bar{x} \to \infty), \\
&\hat{\mu}_0^*(\bar{x}) \to 0 \quad (\bar{x} \to -\infty)
\end{aligned}
$$

になる.

(ii) σ^2 が未知の場合. 任意の $K>0$ について

$$\tilde{\pi}_K(\mu,\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{K\sigma}e^{-\mu/K} & (\mu\geq 0,\ \sigma>0),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となる広義の事前密度 $\tilde{\pi}_K$ をとる. このとき

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\prod_{i=1}^n\phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\tilde{\pi}_K(\mu,\sigma)d\sigma=\int_0^\infty\prod_{i=1}^n\phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{K\sigma}e^{-\mu/K}d\sigma\\
&=\int_0^\infty\frac{1}{K(\sqrt{2\pi})^n\sigma^{n+1}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2-\frac{\mu}{K}\right\}d\sigma\\
&=\frac{1}{K}e^{-\mu/K}\int_0^\infty\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}(2\tau)^{\frac{n}{2}-1}\exp\left\{-\tau\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right\}d\tau\\
&=\frac{2^{(n/2)-1}}{(\sqrt{2\pi})^n}\left\{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right\}^{-n/2}\frac{1}{K}e^{-\mu/K}\int_0^\infty y^{(n/2)-1}e^{-y}dy\\
&=C_1\left\{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right\}^{-n/2}e^{-\mu/K}\\
&=C_1\left\{(n-1)s_0^2+n(\bar{x}-\mu)^2\right\}^{-n/2}e^{-\mu/K}\\
&=C_2s_0^{-n}\left\{1+\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{(n-1)s_0^2}\right\}^{-n/2}e^{-\mu/K}\\
&=C_0s_0^{-n}\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left((n-1)/2\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}\frac{s_0}{\sqrt{n}}e^{-\mu/K}\\
&=:C_0s_0^{-n}f_{n-1}(t)\frac{s_0}{\sqrt{n}}e^{-\mu/K}
\end{aligned}\tag{2.9}$$

になる. ただし

$$C_1:=\frac{2^{(n/2)-1}\Gamma(n/2)}{K(\sqrt{2\pi})^n},\quad C_2:=C_1(n-1)^{-n/2}$$

$$C_0:=C_2\frac{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left((n-1)/2\right)}{\Gamma(n/2)},\quad s_0=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2},$$

$$t=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)/s_0$$

とする. ここで, f_{n-1} は自由度 $n-1$ の t 分布の p.d.f. であることに注意. よって, (2.9) から

$$\int_0^\infty\prod_{i=1}^n\phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\tilde{\pi}_K(\mu,\sigma)d\sigma=C_0s_0^{-n}f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s_0}\right)e^{-\mu/K}$$

になり, さらに

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\tilde{\pi}_K(\mu,\sigma)d\sigma d\mu = \int_0^\infty C_0 s_0^{-n} f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s_0}\right)e^{-\mu/K}d\mu$$
$$= \frac{C_0 s_0^{-n+1}}{\sqrt{n}}e^{-\bar{x}/K}\int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{x}/s_0}\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}e^{s_0 t/(K\sqrt{n})}dt$$
$$= \frac{C_0 s_0^{-n+1}}{\sqrt{n}}e^{-\bar{x}/K}\int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{x}/s_0} f_{n-1}(t)e^{s_0 t/(K\sqrt{n})}dt =: \frac{C_0 s_0^{-n+1}}{\sqrt{n}}e^{-\bar{x}/K}H_K(\bar{x},s_0) \tag{2.10}$$

になる. したがって, (2.9), (2.10) より μ の事後周辺密度は

$$\pi_K(\mu|\bar{X},S_0) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)\tilde{\mu}_K(\mu,\sigma)d\sigma \Bigg/ \int_0^\infty\int_0^\infty \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)\tilde{\mu}_K(\mu,\sigma)d\sigma d\mu$$
$$= \sqrt{n}f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S_0}\right)e^{-(\mu-\bar{X})/K}\Bigg/\{S_0 H_K(\bar{X},S_0)\}$$

になり, 2 乗損失と広義の事前密度 $\tilde{\pi_K}$ に関する一般 Bayes 推定量は, 事後平均

$$\hat{\mu}_K(\bar{X},S_0) := E(\mu|\bar{X},S_0) = \int_0^\infty \mu\pi_K(\mu|\bar{X},S_0)d\mu$$
$$= \frac{\sqrt{n}}{S_0 H_K(\bar{X},S_0)}\int_0^\infty \mu f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S_0}\right)e^{-(\mu-\bar{X})/K}d\mu$$
$$= \frac{1}{H_K(\bar{X},S_0)}\int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{X}/S_0}\left(\bar{X}-\frac{S_0 t}{\sqrt{n}}\right)f_{n-1}(t)e^{S_0 t/(K\sqrt{n})}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{X}/S_0}\left(\bar{X}-\frac{S_0 t}{\sqrt{n}}\right)f_{n-1}(t)e^{S_0 t/(K\sqrt{n})}dt \Bigg/ \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{X}/S_0} f_{n-1}(t)e^{S_0 t/(K\sqrt{n})}dt$$

となり, $K \to \infty$ とすると

$$\hat{\mu}_K(\bar{X},S_0) \to \bar{X} - \frac{S_0\int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{X}/S_0} t f_{n-1}(t)dt}{\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{X}/S_0} f_{n-1}(t)dt}$$

になる.

3 区間推定

未知の母数を誤差を含む観測値から区間推定する問題において, 誤差の大きさが未知母数の値とほぼ同じ大きさである場合には, 母数が正値であることを考慮しない通常の信頼区間には負の範囲を含んでしまうし, またそれを正に限定した区間は空集合になることもあり得る. そしてこの問題について多くの方法が物理学者や統計学者から提案されてきた. しかし統計学の立場からは問題は極めて単純明快であって, 基本的には Bayesian と Non-Bayesian の 2 つの立場がある.

Bayesian の場合には, 母数の存在範囲に事前分布を限定すればよいだけのことで, その場合そのような事前分布が適当であるかどうかの考慮が必要であるが, それは一般の場合と本質的に変わりはない.

頻度主義の立場からは, 問題は一群の仮説検定の問題を考えて与えられた観測点に対しその点が受容域に含まれるような仮説に対応する母数の範囲をとればよい. すなわち母数を $\theta > 0$ とすると任意の $\theta = \theta_0 > 0$ に対し, 仮説 $\theta = \theta_0$ を対立仮説 $\theta \neq \theta_0$, $\theta > 0$ を検定する (何らかの意味で良い) 水準 α の検定の受容域を $A(\theta_0)$ とするとき, 観測値 X に対し, $X \in A(\theta_0)$ となるような θ_0 の範囲を $S(X)$ とすれば, $\theta > 0$ について

$$P_\theta\{\theta \in S(X)\} = P_\theta\{X \in A(\theta)\} = 1 - \alpha$$

となるから, 信頼域 $S(X)$ が得られ, それが区間ならば信頼係数 $1-\alpha$ の θ の信頼区間が得られる. そこで問題は上記の検定問題に対してどのような検定方式で選べばよいかである. 不偏検定の考え方が適用できないことに注意して, 次のような方式が提案されている ([SA04], [AST05]). 確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の j.p.d.f. を $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \theta)$ とし, 仮説 $H : \theta = \theta_0$ を対立仮説 $K : \theta \neq \theta_0$, $\theta > 0$ に対して検定する問題について, $\theta > 0$ の範囲で定義された事前分布 $\Pi(\theta)$ を考え, 対立仮説として

$$K_\Pi : f_\Pi(\boldsymbol{x}) = \int_0^\infty f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \theta) d\Pi(\theta)$$

をとり, 単純仮説 H_0 を単純対立仮説 K_Π に対して検定する問題を考えれば, 最強力検定の受容域は

$$A(\theta_0) := \{\boldsymbol{x} | f_\Pi(\boldsymbol{x})/f(x, \theta_0) \leq \lambda\}$$

の形になる. ここで, 定数 λ は $P_{\theta_0}\{X \in A(\theta_0)\} = 1 - \alpha$ から定められる. このとき, Π をいろいろ取ることにより多くの信頼区間が得られ, それらはすべて許容的になる.

いま, 設定は第 2 節と同じとする. 特に $\sigma^2 = 1$ として, 枢軸量 $T(\boldsymbol{X}) := \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$ が $N(0,1)$ に従うから区間

$$I(\bar{X}) := \left[\max\left\{0, \bar{X} - \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right\}, \max\left\{0, \bar{X} + \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right\}\right] \tag{3.1}$$

は信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間になる (図 3.1 参照). ただし, $u_{\alpha/2}$ は $N(0,1)$ の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点とする.

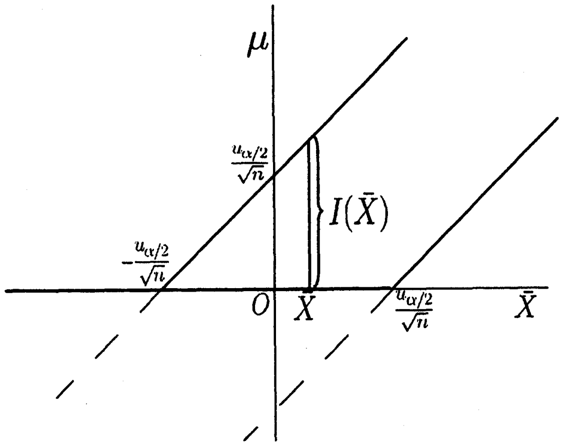

図 3.1　信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間の信頼限界

しかし, (3.1) のような信頼区間は直感的には疑問ではないだろうか. そこで前節のように Bayes 的に考えて, (2.1) の事前密度を取ると事後密度は, (2.2) より

$$
\begin{aligned}
\pi_K(\mu|\bar{X}) &= \phi\left(\sqrt{n}\left(\mu-\bar{X}+\frac{1}{nK}\right)\right) \Big/ \int_0^\infty \phi\left(\sqrt{n}\left(\mu-\bar{X}+\frac{1}{nK}\right)\right) d\mu \\
&= \sqrt{n}\phi\left(\sqrt{n}\left(\mu-\bar{X}+\frac{1}{nK}\right)\right) \Big/ \Phi\left(\sqrt{n}\left(\bar{X}-\frac{1}{nK}\right)\right), \quad \mu \geq 0 \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

となる. そこで, 任意の α $(0<\alpha<1)$ について

$$
1-\alpha = \int_{\{\mu|\pi_K(\mu|\bar{X})\geq c,\ \mu\geq 0\}} \pi_K(\mu|\bar{X})d\mu \qquad (3.3)
$$

となる集合 $\{\mu|\pi_K(\mu|\bar{X}) \geq c,\ \mu \geq 0\}$, すなわち信頼係数 $1-\alpha$ の μ の ($\mu_K(\cdot|\bar{X})$ に関する) 最大事後密度 (highest posterior density(HPD)) 信頼区間が求められる. 実際, (3.2), (3.3) から

$$
1-\alpha = \frac{1}{\Phi(\sqrt{n}(\bar{X}-\frac{1}{nK}))} \int_{\{\mu|\pi_K(\mu|\bar{X})\geq c,\ \mu\geq 0\}} \sqrt{n}\phi\left(\sqrt{n}\left(\mu-\bar{X}+\frac{1}{nK}\right)\right) d\mu \qquad (3.4)
$$

となる $\mu = \underline{c}_\alpha(K), \bar{c}_\alpha(K)$ を求めると, 区間 $[\underline{c}_\alpha(K), \bar{c}_\alpha(K)]$ は信頼係数 $1-\alpha$ の μ の ($\pi_K(\cdot|\bar{X})$ に関する)HPD 信頼区間になる (図 3.2 参照). 特に (3.2) において $K \to \infty$ とすれば

$$
\pi_K(\mu|\bar{X}) \to \frac{\sqrt{n}\phi(\sqrt{n}(\mu-\bar{X}))}{\Phi(\sqrt{n}\bar{X})} =: \pi_0(\mu|\bar{X})
$$

となる. そこで

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= \int_{\{\mu|\pi_0(\mu|\bar{X})\geq c,\ \mu\geq 0\}} \pi_0(\mu|\bar{X})d\mu \\
&= \frac{1}{\Phi(\sqrt{n}\bar{X})} \int_{\{\mu|\pi_0(\mu|\bar{X})\geq c,\ \mu\geq 0\}} \sqrt{n}\phi(\sqrt{n}(\mu-\bar{X}))d\mu
\end{aligned}
$$

となる $\mu = \underline{c}_\alpha(K), \bar{c}_\alpha(K)$ を求めると, 区間 $[\underline{c}_\alpha(K), \bar{c}_\alpha(K)]$ は信頼係数 $1-\alpha$ の μ の ($\pi_0(\cdot|\bar{X})$ に関する)HPD 信頼区間になる. そして, (3.4) より, α と K の値を与えたときに正規分布 $N(1,1)$ から得られたデータに基づいて μ の ($\pi_K(\mu|\bar{X})$ に関する)HPD 信頼区間の値をシミュレーションによって求めることができる (表 3.1 参照). 表 3.1 から分かるように, μ の HPD 信頼区間は妥当に見える. また K が大きくなるに従って事前分布が一般一様分布に近づくので, 区間幅が大きくなる傾向も分かる.

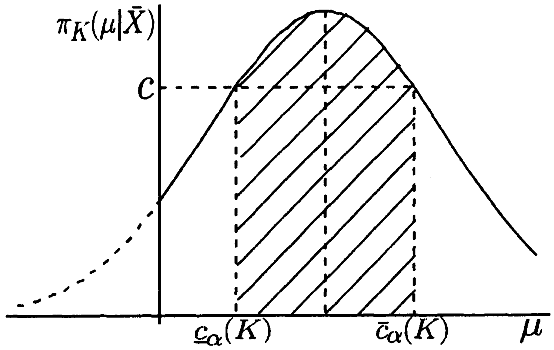

図 3.2　信頼係数 $1-\alpha$ の μ の ($\pi_K(\mu|\bar{X})$ に関する) HPD 信頼区間 $[\underline{c}_\alpha(K), \bar{c}_\alpha(K)]$

$K \backslash 1-\alpha$	0.90	0.95	0.99
1	[0.00145 , 1.26861]	[0.00221 , 1.52188]	[0 , 2.00907]
2	[0.00760 , 1.46917]	[0.00363 , 1.77476]	[0.00070 , 2.33917]
3	[0.00803 , 1.56461]	[0.00419 , 1.83244]	[0.00138 , 2.42223]
4	[0.01242 , 1.59249]	[0.00563 , 1.89274]	[0.00035 , 2.47348]
5	[0.01819 , 1.61529]	[0.00812 , 1.94401]	[0.00102 , 2.52823]
10	[0.01939 , 1.70302]	[0.01198 , 1.98178]	[0.00217 , 2.64274]
20	[0.03199 , 1.79064]	[0.01294 , 2.01035]	[0.00273 , 2.59114]
30	[0.03030 , 1.74873]	[0.01742 , 2.12259]	[0.00039 , 2.61077]
∞	[0.02899 , 1.83560]	[0.00711 , 2.01845]	[0.00303 , 2.66635]

表 3.1　$n=1$ の場合の信頼係数 $1-\alpha$ の μ の ($\pi_K(\cdot|\bar{X})$ に関する)HPD 信頼区間 $[\underline{c}_\alpha(K), \bar{c}_\alpha(K)]$

4　おわりに

本論において, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ $(\mu \geq 0)$ の平均 μ の推定問題を考えた. まず $\sigma^2 = 1$ のときに最尤推定量, 一般 Bayes 推定量を求め, それらの許容性も示した. そして, σ^2 が未知のときに μ の一般 Bayes 推定量も求めた. 次に, $\sigma^2 = 1$ のときに μ の最大事後密度 (HPD) 信頼区間を求め, 具体的に α と K を与えてそれらの値をシミュレーションによって求めた. 今後, Bayes および頻度主義の観点からのさらなる検討が必要である.

5 参考文献

[AST05] Akahira, M., Shimizu, A. and Takeuchi, K. (2005). The construction of combined Bayesian-frequentist confidence intervals for a positive parameter. *Statistica*, **65**(4), 351–365.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* (2nd ed.), Springer, New York.

[MS00] Mandelkern, M. and Schultz, J. (2000). Coverage of confidence intervals based on conditional probability. *J. High Energy Phys.*, **11**, 036.

[RW01] Roe, B. P. and Woodroof, M. B. (2001). Setting confidence belts. *Phys. Rev.*, D63, 013009.

[SA04] 清水淳史, 赤平昌文 (2004). Some approaches to confidence intervals for a restricted parameter. 京都大学　数理解析研究所講究録 **1380**, 106–126.